ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1985

MATHEMATIQUES I
(3 pages dactylographiées)

TA

Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

PREMIERE PARTIE

I-1. Soit f appartenant à V.

Montrer que la fonction g_1 définie sur]0,1] par

$$g_1(x) = (\text{Log}x) \int_0^x f(t)dt$$

admet la limite zéro quand x tend vers zéro (le symbole Log désigne le logarithme népérien). On pourra observer que f est bornée sur [0,1].

I-2. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 (\text{Log}t)\, f(t)dt$$

est absolument convergente. On désigne sa valeur par I.

I-3. Soit g la fonction définie sur [0,1] par les relations

$$(F) \begin{cases} g(x) = (\text{Log}x) \displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_x^1 (\text{Log}t)\, f(t)dt & \text{pour } x \neq 0 \\ g(0) = I \end{cases}$$

a) Montrer que g est dérivable sur]0,1] et que l'on a, pour tout $x \in]0,1]$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

b) Montrer que g admet une dérivée continue sur [0,1] ; comparer g'(0) et f(0).

I-4. Montrer que g admet une dérivée seconde sur]0,1] vérifiant, pour tout $x \in]0,1]$,

$$xg''(x) + g'(x) = f(x).$$

I-5. Dans cette question, $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer g(x) ; g"(0) existe-t-il ?

DEUXIEME PARTIE

Les relations (F) introduites dans la question I-3 permettent d'associer à tout élément f de V un autre élément g de V. En posant g = T(f), on définit donc une application T de V dans V, évidemment linéaire, que l'on va étudier dans la suite du problème.

II-1. T est-elle injective ?

II-2. Montrer que T(V), image de V par T, est formée des fonctions g ayant les 4 propriétés suivantes :

. g est continuement dérivable sur [0,1]

. g' est continuement dérivable sur]0,1]

. g(1) = 0

. xg"(x) tend vers zéro quand x tend vers zéro.

On pourra utiliser la question I-4.

II-3. Pour f_1 et f_2 appartenant à V, on pose

$$(f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(x)\, f_2(x)\,dx$$

Montrer que, si f_1 et f_2 appartiennent à V, on a

$$(T(f_1) \mid f_2) = (f_1 \mid T(f_2)).$$

On pourra poser $T(f_1) = g_1$, $T(f_2) = g_2$ et utiliser I-4.

II-4. Montrer que, pour tout f appartenant à V,

$$(f \mid T(f)) \leqslant 0.$$

Quand a-t-on $(f \mid T(f)) = 0$?

TROISIEME PARTIE

Soit α un réel ; s'il existe f non nul appartenant à V et tel que $T(f) = \alpha f$, on dit que α est valeur propre de T et que f est vecteur propre associé à α.

III-1. a) Montrer que les valeurs propres de T, s'il en existe, sont strictement négatives.

b) Soit f un vecteur propre de T. Etablir que f est continuement dérivable sur [0,1].

III-2. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que, si $-\lambda$ est valeur propre de T et si f est un vecteur propre associé à $-\lambda$ alors l'application de $[0, \frac{1}{\lambda}]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(\lambda x)$ est, sur $]0, \frac{1}{\lambda}[$, solution de l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + y = 0$

III-3. Etant donné une série entière $1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, de rayon de convergence $R \neq 0$, déterminer les a_n pour que la fonction somme h de cette série soit, dans l'intervalle $]-R, +R[$, solution de (E). Que vaut R ?

III-4. Soit $c > 0$ et y une fonction continuement dérivable sur [0,c], solution de E sur]0,c] et vérifiant en outre $y(0) = 0$.

a) Mettre sous une forme aussi simple que possible la dérivée de la fonction qui, à $x \in]0,c]$, associe $xy'^2(x) + y^2(x)$.

b) Montrer que y est la fonction nulle sur [0,c].

III-5. Montrer que si f est vecteur propre de T associé à la valeur propre $-\lambda$ et si $f(0) = \mu$ alors on a , pour tout x appartenant à [0,1], $f(x) = \mu\, h(\frac{x}{\lambda})$. On appliquera III-4 à la fonction ~~f - μh~~. $x \mapsto f(x) - \mu h(\frac{x}{\lambda})$

III-6. Montrer que $-\lambda$ est valeur propre de T si et seulement si $h(\frac{1}{\lambda}) = 0$

III-7. Montrer que si f_1 et f_2 sont vecteurs propres de T associés à des valeurs propres différentes, alors $(f_1 \mid f_2) = 0$

QUATRIEME PARTIE

Il reste donc à étudier les zéros de la fonction h définie par

$$h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2} .$$

IV-1. a) Etudier le sens des variations de h sur l'intervalle [0, 2].

b) Quel est le signe de h(2) ?

IV-2. Montrer qu'il existe r_1 strictement positif, tel que l'on ait les deux propriétés suivantes :

$h(r_1) = 0$

h(x) différent de 0 pour tout $x < r_1$.

IV-3. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a : $xh'^2(x) + h^2(x) \leqslant 1$.

IV-4. On suppose provisoirement qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \geqslant c$ on ait $h(x) > 0$.

a) Montrer que la fonction qui à x associe xh'(x) est décroissante sur $[c, +\infty[$.

b) Soit $x_0 \geqslant c$. Pour $x \geqslant x_0$, on pose $\varphi(x) = h(x) - x_0\, h'(x_0) \operatorname{Log} x$.

Quel est le signe de $\varphi'(x)$? Peut-on avoir $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$?

Peut-on avoir $h'(x_0) < 0$?

c) Montrer que h(x) admet, quant x tend vers $+\infty$, une limite ℓ strictement positive.

d) Montrer qu'il existe $x_1 \geqslant c$ tel que pour tout $x \geqslant x_1$, on ait $h''(x) \leqslant \frac{-\ell}{2x}$.

e) En déduire que l'hypothèse provisoire faite au début de IV-4 est absurde.

IV-5. Que peut-on en conclure concernant le nombre de zéros de h ?